Übungsstunde lineare Algebra:

Heutige Themen:

- LR-Zerlegung
- Inverse → Gauss-Jordan Algorithmus
- Die Transponierte
- Euklidische Norm & Skalarprodukt
- Orthogonale Matrizen & Vektoren

Frage von Slack:

"Falls $r = m$ ist, so ist das LGS für beliebige rechte Seiten b lösbar."

2 Fälle:

$n = m$:

$$\xrightarrow{\quad n \quad} y$$

$$\begin{array}{c} m \\ = n \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gaussen}} \left[\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{mn} & d_m \end{array}\right]$$

$\downarrow x$

$n > m$: eg. 5

$$\text{eg. } 3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left[\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} & c_{35} & d_3 \end{array}\right]$$

$r = m \leq n$

LR-Zerlegung:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Permutationsm.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{L}}\,\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{x}}_{\underline{c}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b} \Rightarrow \underline{c}$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c} \Rightarrow \underline{x}$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Falls es Zeilenvertauschungen gibt, so müssen die Koeffiz. der jeweiligen Zeilen in $\underline{\underline{L}}$ ebenfalls getauscht werden!

Gaussen:

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{P}}} \left| \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{matrix}}_{\underline{\underline{A}}} \right. \quad \xrightarrow[\mathrm{III}-(-\mathrm{I})]{\mathrm{II}-(+3\mathrm{I})} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{matrix} \right.$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-(-2\mathrm{II})} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{P}}} \left| \underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}}_{\underline{\underline{R}}} \right.$$

⚠ Nicht die 1 auf der Diagonalen tauschen

$$\underline{\underline{L}}\,\underline{c} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b} \qquad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right. \iff \begin{matrix} c_1 = \underline{1} \quad \underline{1} \\ 3c_1 + c_2 = 0 \\ -1c_1 - 2c_2 + c_3 = 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \Rightarrow c_2 = \underline{-3} \quad \underline{-1} \\ \Rightarrow c_3 = \underline{-3} \quad \underline{2} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = \underline{\underline{-1}} \\ x_2 = \underline{\underline{-1}} \\ x_1 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}} \end{array} \Rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} \frac{35}{24} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}}$$

<u>Matrixinverse:</u> (für $n \times n$-Matrizen)

Ist diejenige Matrix A^{-1} zur Matrix A für welche gilt:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Formel für 2×2 Matrizen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}}$$

Gauss-Jordan-Algorithmus:

$$\rightarrow \underline{\underline{A}} \,|\, \underline{\underline{I}} \xrightarrow{\text{Gauss}} \underline{\underline{I}} \,|\, \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{I}}\,\underline{b}$$

$$\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}}\,\underline{x} = \underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{I}}}\,\underline{b} \qquad ⚡ \neq \underline{\underline{A}}\,\underline{x}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}\,\underline{b}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{I}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{II - \frac{1}{2} I} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

← Durch Pivot-Element dividiere[n]

$$\xrightarrow{I - 2 II} \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4} I} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix}}_{\underline{\underline{A}}^{-1}}$$

Formel:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}}$$

HA: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Transponierte:

-> "Spiegeln" an der Hauptdiagonalen

"Hermitesche" -> noch nicht so wichtig

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{T\,H} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Euklidische Norm & Skalarprodukt:

Norm: "Länge" von Vektoren:

Beispiel:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \|\underline{b}\|_2 = \|\underline{b}\| = \sqrt[2]{b_1^2 + b_2^2}$$

Skalarprodukt: Mass für "Winkel" oder allgemeiner, für die <u>Orthogonalität</u> <=> "rechte" Winkel

Beispiel:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ \underline{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Schreibweise:

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{8} \neq 0$$ -> Nicht senkrecht

$$\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$ -> <u>Orthogonal</u>

Orthogonale Matrizen & Vektoren:

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \underline{0}$

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = \underline{1}$$

$\Rightarrow$ <u>Orthogonal</u>